

© 2024 г. **Е.Н. ГРЯЗИНА**, д-р комп. наук (E.Gryazina@skoltech.ru),  
**Д.Ю. БАЛУЕВ** (Dmitrii.Baluev@skoltech.ru)  
(Сколковский институт науки и технологий, Москва)

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДОПУСТИМЫХ И ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

Статья посвящена анализу области допустимых режимов энергетических систем. Рассматриваются задачи вычисления допустимых и предельных режимов энергосистем, анализа геометрии области допустимых режимов и генерирования точек в этой области. Проводятся параллели с работами Б.Т. Поляка по анализу образа квадратичного отображения, модификации метода Ньютона и развитию методов генерации асимптотически равномерных выборок в областях со сложной геометрией. Особое внимание уделено методу Ньютона с условием трансверсальности и его применению для построения процедуры граничного оракула и генерации с его помощью точек в области допустимых режимов.

*Ключевые слова:* область допустимых режимов энергосистемы, уравнения установившегося режима, образ квадратичного отображения, метод Ньютона, сэмплирование.

**DOI:** 10.31857/S0005231024050047, **EDN:** YQDRMJ

### 1. Введение

Развитие теории, моделей и методов расчета оптимальных и предельных режимов работы энергосистемы не теряет актуальности ввиду широкого распространения распределенных возобновляемых источников энергии, изменения паттернов потребления электрической энергии и цифровой трансформации энергетической отрасли. Управление современными энергосистемами требует быстрых и надежных методов оценки запасов статической устойчивости, которые характеризуются расстоянием до границы допустимой области. Кроме того, нарастающее распространение распределенных возобновляемых источников энергии побуждает пересмотреть критерии оптимальности режимов работы сети, что сдвигает часто эксплуатируемые режимы ближе к границе. Общим во многих задачах энергетики является понятие области допустимых режимов энергосистемы – область в многомерном пространстве узловых мощностей (правых частей уравнений установившегося режима), таких что эта система уравнений имеет хотя бы одно вещественное решение.

Далее во введении проиллюстрирована связь задач по исследованию допустимых и предельных режимов работы энергосистемы с образом квадратичного отображения,  $D$ -разбиением, методом Ньютона и его модификациями,

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-19-00773).

а также методами генерации асимптотически равномерных выборок в областях со сложной геометрией.

### 1.1. Образ квадратичного отображения

Система уравнений установившегося режима (далее УУР) представляет собой представление законов Ома и Кирхгофа, связывающих значения напряжений и мощностей в узлах энергосистемы (1)–(2). Нетрудно заметить, что эти уравнения квадратичны относительно переменной  $V$ . В работах Б.Т. Поляка [1, 2] предложены достаточные условия выпуклости образа квадратичного отображения  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  при  $m = 2, 3$ , а позднее в [3] предложен рандомизированный подход к сертификации невыпуклости образа квадратичных отображений.

Действительно, область допустимых режимов энергосистемы имеет весьма причудливую форму, причем это проявляется для весьма низкоразмерных систем, состоящих из трех–пяти узлов. На рис. 1 представлено сечение области допустимых режимов системы из трех узлов. В настоящем случае область выпукла, однако в [4] показано, что при изменении вектора правой части сечение станет невыпуклым.

Примеры более экзотических форм области допустимых режимов можно найти в [5], одно из таких сечений для системы из пяти узлов представлено на рис. 2.

Глядя на рис. 1–2, нетрудно заметить сложную внутреннюю структуру области допустимых режимов. В силу нелинейности системы УУР существуют

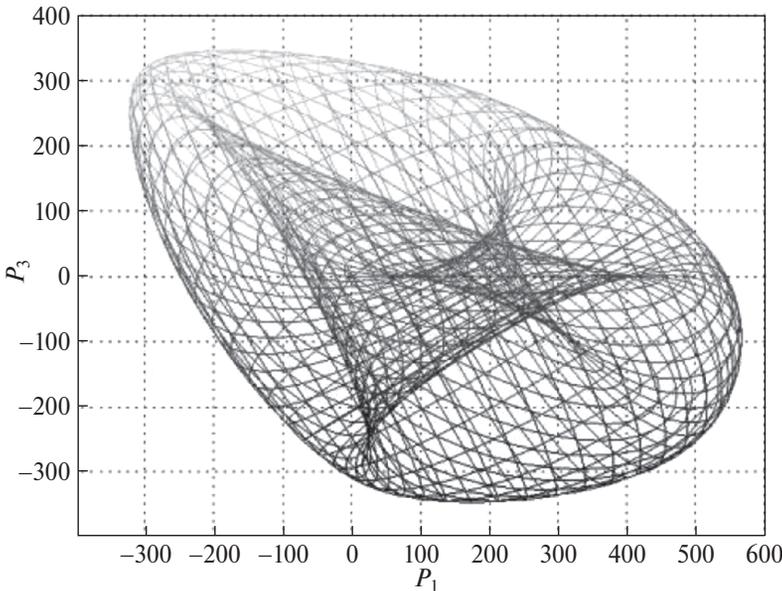


Рис. 1. Выпуклая область допустимых режимов из [4].

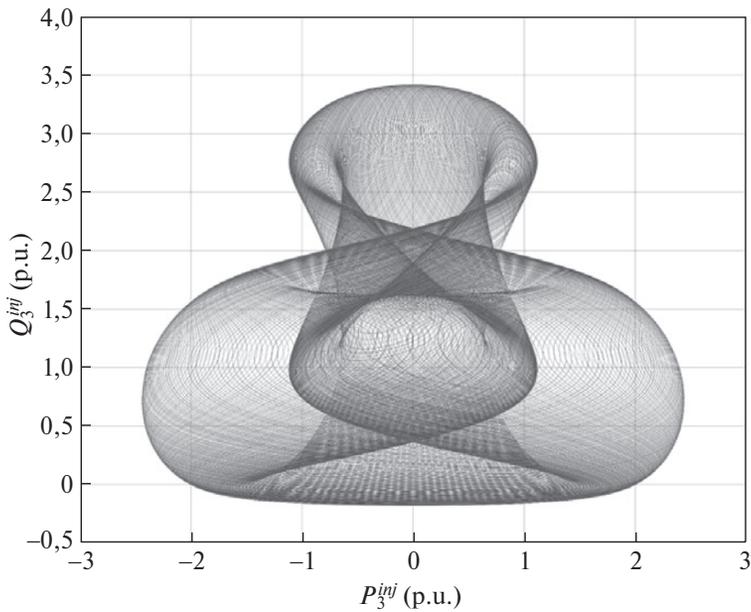


Рис. 2. Невыпуклая область допустимых режимов из [5].

внутренние бифуркационные кривые, переход через которые соответствует либо изменению количества решений, либо исчезновению решений, а следовательно и допустимого режима системы. Эти уравнения могут иметь несколько изолированных решений, представляющих либо устойчивое, либо неустойчивое равновесие динамической модели энергосистемы. Наличие нескольких решений ранее игнорировалась исследователями, их усилия были в основном сосредоточены на выявлении только одного вещественного решения УУР, а не на всех изолированных решениях. Работа [6] по-видимому является первой, где исследован феномен кратности решений УУР и предложен способ построения всех критических точек области допустимых режимов. Под критическими точками понимаются точки бифуркационных кривых, пересечение которых меняет количество решений системы УУР. Подобный анализ допустимой области идейно близок развитому в работах Б.Т. Поляка методу  $D$ -разбиения [7, 8]. Кривая  $D$ -разбиения делит пространство параметров на области с различным количеством устойчивых корней характеристического полинома линейной динамической системы, а бифуркационная кривая (поверхность в пространствах более высокой размерности) разделяет области с различным количеством решений в области допустимых режимов энергосистемы.

### 1.2. Роль метода Ньютона

Традиционно для расчета установившегося режима используется классический метод Ньютона. Ввод дополнительных переменных, характеризующих запасы устойчивости, делает систему недоопределенной. В этом случае

задача расчета режимов оказывается в контексте работ Б.Т. Поляка [9, 10]. Одним из наиболее перспективных методов для быстрого расчета режимов близких к предельным является метод Ньютона с условием трансверсальности (TENR, Transversality Enforced Newton-Raphson) [11], где помимо дополнительной переменной добавляется условие вырожденности матрицы Якоби.

Метод TENR концептуально подобен, но математически отличается от традиционных методов, базирующихся на стандартном методе Ньютона. В TENR стандартная система УУР дополняется условием трансверсальности. Это ограничение регуляризует исходно вырожденную систему в предельной точке и обеспечивает сходимость алгоритма Ньютона. В дополнение, TENR позволяет при расчете установившегося режима учитывать любые технические ограничения, которые могут быть представлены как в виде равенств, так и неравенств. С вычислительной точки зрения ключевым преимуществом TENR является простая форма записи условий трансверсальности, которая не требует явного отслеживания и инициализации нулевых собственных векторов якобиана. Это упрощение приводит к меньшему размеру системы нелинейных уравнений, а также позволяет упростить инициализацию алгоритма.

Метод TENR обладает рядом преимуществ: алгоритм численно устойчив в непосредственной близости к границе, а также на границе устойчивости; слабо зависит от начального приближения; реализована декомпозиция матрицы Якоби по сингулярным числам, которая позволяет провести анализ чувствительности энергосистемы и выявить наиболее «эффективные узлы» для применения управляющих воздействий. На основе TENR можно решать задачи оценки максимально допустимой передачи электроэнергии [12], а также онлайн-оценки запасов устойчивости по напряжению [13]. Работа метода протестирована на ряде базовых тестовых энергосистем IEEE и модели энергосистемы Дальнего Востока России [14].

### *1.3. Генерирование параметров допустимых режимов*

Знание геометрии области допустимых режимов энергосистемы и ее границы позволяет быстро оценивать запасы устойчивости, вычислять оптимальные воздействия в задаче противоаварийного управления. Сложность задачи обеспечения надежной и безопасной работы энергосистем в режиме реального времени постоянно нарастает, поскольку текущий режим быстро меняется из-за неопределенностей, связанных с увеличением доли возобновляемой генерации, менее предсказуемыми нагрузками и различными непредвиденными обстоятельствами. Следовательно, во избежание любого нежелательного поведения системы или крупномасштабного отключения электроэнергии, требуется оценка запасов устойчивости по напряжению в режиме реального времени. Такая оценка не только сложна, но и требует значительных вычислительных ресурсов, в основном из-за постоянно меняющегося состояния сети. Как на этапе планирования режимов работы, так и на этапе эксплуатации сети, ее безопасная работа требует устойчивости по напряжению, которая

заключается в способности энергосистемы поддерживать приемлемые уровни напряжения на всех шинах после воздействия помех [15].

Современные энергосистемы более уязвимы с точки зрения устойчивости, поскольку функционируют вблизи границы допустимой области. В электрических сетях возникает неустойчивость по напряжению, когда режим работы приближается к точке коллапса или к точке седло-узловой бифуркации, после чего исчезает вещественное решение уравнений установившегося режима или меняется число решений системы уравнений установившегося режима. Уточнить представление об области допустимых режимов можно посредством сэмплирования, т.е. генерации параметров допустимых режимов. Такие наборы параметров также полезны для настройки алгоритмов машинного обучения. Одним из направлений исследования Поляка Б.Т. было развитие методов генерации асимптотически равномерно распределенных выборок в сложных областях [16, 17].

В настоящей статье представлено подробное описание метода TENR, как наиболее эффективного метода для расчета предельных режимов энергосистемы, а также показано, как использовать TENR для построения процедуры граничного оракула, чтобы с его помощью генерировать точки в области допустимых режимов.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 представлена формальная постановка задачи. В разделе 3 содержится описание метода TENR и обсуждается стратегия выбора оптимального размера шага при его реализации. Раздел 4 посвящен задаче генерирования точек в области допустимых режимов энергосистемы. В разделе 5 приведены численные примеры, иллюстрирующие эффективность метода TENR как для расчета предельных режимов (граничных точек области допустимых значений), так и для генерации точек.

## 2. Постановка задачи

Поиск предельного режима работы энергетической системы тесно связан с расчетом режима. Режим – состояние энергосистемы, которое может быть охарактеризовано количественными показателями: мощность, напряжение, ток, углы сдвига векторов ЭДС и другие. Различают переходные и установившиеся режимы в зависимости от скорости их изменения. Установившийся режим – режим, в котором параметры сохраняют свои значения на рассматриваемом промежутке времени или изменяются относительно медленно [18]. Поскольку режим обладает количественными характеристиками, его можно рассчитать и оценить. Расчет установившегося режима (расчет потокораспределения) – это определение всех параметров установившегося режима при известных параметрах системы (схемы соединения элементов, сопротивление линий и т.д.) и некоторых задаваемых параметрах режима [19]. Совокупность уравнений, сформированных на основе схем замещения энергосистемы, а также законов Ома и Кирхгофа есть не что иное, как математическая модель установившихся режимов энергосистем.

В теории электрических систем существует большое количество возможных математических моделей, каждая из которых обладает как положительными, так и отрицательными характеристиками. В настоящей работе в качестве модели использована система УУР в форме баланса мощностей, представленная в прямоугольной системе координат. Напряжение запишем в виде комплексной величины:  $\hat{V}_i = V_i^r + jV_i^m \in \mathbb{C}$ .  $G_{ij}$  и  $B_{ij}$  – действительные и мнимые части комплексного значения проводимости  $\hat{Y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij} \in \mathbb{C}$ . Система состоит из  $n$  узлов, где  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$  – множество узлов, за исключением балансирующего (базисного) узла  $\mathcal{S}$ ; множество PQ-узлов (нагрузочных узлов) обозначим как  $\mathcal{L}$ ; множество PV-узлов (генераторных узлов) обозначим как  $\mathcal{G}$ . Для каждого  $i \in \mathcal{N}$ , значения узловой активной мощности могут быть вычислены следующим образом [18, 20, 21]:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n \left\{ V_i^r (G_{ik} V_k^r - B_{ik} V_k^m) + V_i^m (G_{ik} V_k^m + B_{ik} V_k^r) \right\} = \\ = P_i(x) - \lambda(P_{\text{gen},i} - P_{\text{load},i}),$$

где вектор  $x \in \mathbb{R}^n$  – набор неизвестных (величина напряжений и фазовых углов узлов для каждого узла системы). Аналогичным образом для каждого  $i \in \mathcal{L}$  запишем уравнение узловой реактивной мощности:

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \left\{ V_i^m (G_{ik} V_k^r - B_{ik} V_k^m) - V_i^r (G_{ik} V_k^m + B_{ik} V_k^r) \right\} = \\ = Q_i(x) - \lambda(Q_{\text{gen},i} - Q_{\text{load},i}).$$

Подстрочные индексы «gen» и «load» обозначают уровень генерации и нагрузки в узлах соответственно. В свою очередь,  $\lambda$  – коэффициент, с помощью которого режим «утяжеляется», т.е. нагрузки постепенно увеличиваются, при  $\lambda = \lambda_{\text{max}}$  система находится в предельном режиме. В отличие от представления в полярных координатах, формулировка в декартовых координатах требует включения дополнительного набора уравнений, которые учитывают ограничения на напряжения в PV-узлах. Таким образом, для каждого  $i \in \mathcal{G}$

$$(3) \quad (V_i^r)^2 + (V_i^m)^2 - |\hat{V}_i|_{\text{ref}}^2 = 0,$$

где  $|\hat{V}_i|_{\text{ref}}$  модуль установленного значения напряжения на шине.

Стандартная система уравнений установившегося режима в общем виде может быть записана следующим образом:

$$(4) \quad \mathcal{F}(x, \lambda) = 0,$$

где  $\mathcal{F}$  представляет собой  $k$  нелинейных уравнений, включающих в себя как уравнения небалансов мощности (например, в виде (1), (2)), так и различные технологические ограничения, представленные в виде равенств;  $\lambda$  – коэффициент утяжеления режима, который характеризует близость системы к границе разрешимости уравнений установившегося режима.

Задача поиска предельного режима сводится к нахождению  $\lambda_{\max}$ , что решение системы (4) существует при всех  $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ , но при  $\lambda > \lambda_{\max}$  не существует.

С математической точки зрения, поиск предельного режима — это решение системы уравнений (4) при условии, что матрица Якоби вырождена:

$$(5) \quad g(x) = \det \nabla_x \mathcal{F}(x, \lambda) = 0.$$

Из чего следует, что для поиска предельного режима (границы устойчивости) необходимо совместно решить систему уравнений (4), дополнительную условием, которое учитывает вырожденность матрицы Якоби (5).

### 3. Метод Ньютона–Рафсона с условием трансверсальности

Для решения системы УУР необходимо применять численные итерационные методы, которые предполагают улучшение приближения исходных переменных на каждой итерации. Один из наиболее распространенных и доступных методов — метод Ньютона–Рафсона.

Следует отметить, что классический метод Ньютона–Рафсона имеет ряд негативных особенностей, среди которых следует отметить: зависимость сходимости от выбранных начальных условий, а также плохая сходимость метода на границе существования режима или в непосредственной близости к ней. Причина этого — плохая обусловленность матрицы Якоби. Таким образом, стандартный метод Ньютона дает заведомо заниженную оценку запаса статической устойчивости энергосистемы. В случае, если численный метод будет устойчив на границе существования режима, расстояние до предельного режима может быть получено более точно.

Существует метод, в котором решены указанные проблемы — метод TENR.

При анализе предельного режима, когда  $\lambda$  достигает максимального значения  $\lambda_{\max}$ , матрица Якоби системы УУР становится вырожденной. В этих обстоятельствах шаг вычисления по методу Ньютона  $J^{-1}\mathcal{F}(x)$  увеличивается, что делает классический метод численно неустойчивым. В результате метод может не сойтись или потребовать слишком много итераций для получения результата. В методе TENR к базовой системе уравнений добавлено условие, учитывающее вырождение матрицы Якоби на границе ПР,  $\lambda$  при этом также рассматривается как переменная. Таким образом, области решений исходной и дополненной систем уравнений совпадают.

В рамках метода TENR, условие, учитывающее вырожденность Якоби на границе устойчивости, принято называть условием трансверсальности. Доступно большое количество возможных вариаций записи условия  $g(x)$ , которые представлены в [11]. Наименее затратный (с точки зрения вычислительного времени) способ основан на сингулярном разложении.

В общем виде система уравнений для поиска предельных режимов может быть записана

$$(6) \quad \begin{aligned} F(x, \lambda) &= 0 \\ g(x) &= 0. \end{aligned}$$

Численно система (6) может быть решена с помощью стандартного метода Ньютона. Линеаризация системы уравнений с помощью ряда Тейлора первого порядка в пространстве  $x$  и  $\lambda$

$$(7) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ g \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{F} & \nabla_\lambda \mathcal{F} \\ (\nabla_x g)^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При использовании метода TENR в расчетах участвует так называемая расширенная матрица Якоби  $\mathcal{J}(x, \lambda)$ :

$$(8) \quad \mathcal{J}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{F} & \nabla_\lambda \mathcal{F} \\ (\nabla_x g)^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Приращения неизвестных  $\Delta x, \Delta \lambda$  определим следующим образом:

$$(9) \quad \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{F} & \nabla_\lambda \mathcal{F} \\ (\nabla_x g)^\top & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ g \end{bmatrix}.$$

Используя найденные приращения переменных, определим значения переменных на следующем шаге следующим образом:

$$(10) \quad \mathcal{N}(x, \lambda) := \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} - \alpha \left[ \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{F} & \nabla_\lambda \mathcal{F} \\ (\nabla_x g)^\top & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ g \end{bmatrix} \right].$$

Параметр  $\alpha$  определяет размер шага в методе Ньютона, который необходимо выбирать достаточно малым. Расчет производится итеративно до тех пор, пока не будет достигнут установленный критерий сходимости:

$$(11) \quad \|\mathcal{N}^{(\kappa)}(x, \lambda) - \mathcal{N}^{(\kappa-1)}(x, \lambda)\| \leq \epsilon, \quad \kappa = 1, 2, \dots,$$

где индекс  $\kappa$  – счетчик итераций,  $\epsilon$  – желаемая точность расчета.

Метод Ньютона обладает квадратичной сходимостью в случае, если исходная расчетная точка выбрана в непосредственной близости к действительному решению. Однако возможен случай, когда метод Ньютона требует неадекватно большое количество итераций для сходимости. Для предотвращения таких ситуаций необходимо оптимальным образом выбирать размер шага ньютоновской итерации. Методология выбора оптимального размера шага представлена далее.

3.1. Стратегия выбора оптимального размера шага  
метода Ньютона–Рафсона

Метод Ньютона–Рафсона крайне чувствителен к исходному приближению. В некоторых случаях неправильный выбор стартовой точки может привести к большому количеству итераций, либо метод вовсе не сойдется. Для обеспечения более быстрой сходимости, а также глобальной сходимости при любом адекватном начальном приближении систему уравнений необходимо дополнить коэффициентом демпфирования  $\alpha$ , который был представлен в (10). Один из наиболее эффективных и простых, с точки зрения вычислительного времени, метод – изменение  $\alpha$  на каждой итерации расчета.

Запишем исходную систему уравнений в компактной форме:

$$(12) \quad \mathcal{H}(z) = \begin{cases} \mathcal{F}(x, \lambda) = 0 \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Вектор  $z$  представляет собой набор переменных  $z = [x, \lambda]^\top$ . В декартовой формулировке уравнения, рассматриваемые в (4), являются набором квадратичных уравнений, а условие трансверсальности  $g(x) = 0$  является просто линейным уравнением, особенно в случае, когда условие трансверсальности записано через сингулярное разложение якобиана. Следовательно, для точки  $z^{(\kappa)}$  и вектора  $\Delta z^{(\kappa)}$  систему (12) можно аппроксимировать разложением Тейлора второго порядка как

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}(z^{(\kappa)} + \Delta z^{(\kappa)}) &\approx \mathcal{H}(z^{(\kappa)}) + \\ &+ [\nabla_z \mathcal{H}(z^{(\kappa)})] \Delta z^{(\kappa)} + \frac{1}{2} (\Delta z^{(\kappa)})^\top [\nabla_{zz} \mathcal{H}(z^{(\kappa)})] \Delta z^{(\kappa)}. \end{aligned}$$

Поскольку все уравнения в (4) – второго порядка, а  $g(x)$  – линейное, то (13) выполняется строго. Оптимальный размер шага  $\alpha^{(\kappa)}$  в направлении вектора  $\Delta z^{(\kappa)}$  будем искать как решение следующей задачи минимизации:

$$(14) \quad \mathcal{H}(\alpha) = \left\{ \mathcal{H}(z^{(\kappa)}) + \alpha [\nabla_z \mathcal{H}(z^{(\kappa)})] \Delta z^{(\kappa)} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2}{2} (\Delta z^{(\kappa)})^\top [\nabla_{zz} \mathcal{H}(z^{(\kappa)})] \Delta z^{(\kappa)} \right\},$$

$$(15) \quad \alpha^{(\kappa)} = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathcal{H}(\alpha)\|_2^2.$$

Задачу оптимизации (15) можно решить явно, применив условие оптимальности первого порядка.

На рис. 3 представлены значения  $\alpha^{(\kappa)}$  на каждой итерации метода TENR для тестовых схем IEEE, состоящих из 14, 30, 118 и 300 узлов. Эти случаи тестирования включают в себя стандартную задачу определения предельного режима при исходных условиях, когда все амплитуды напряжений в узлах равны 1, а соответствующие углы – 0. Можно заметить, что изначально

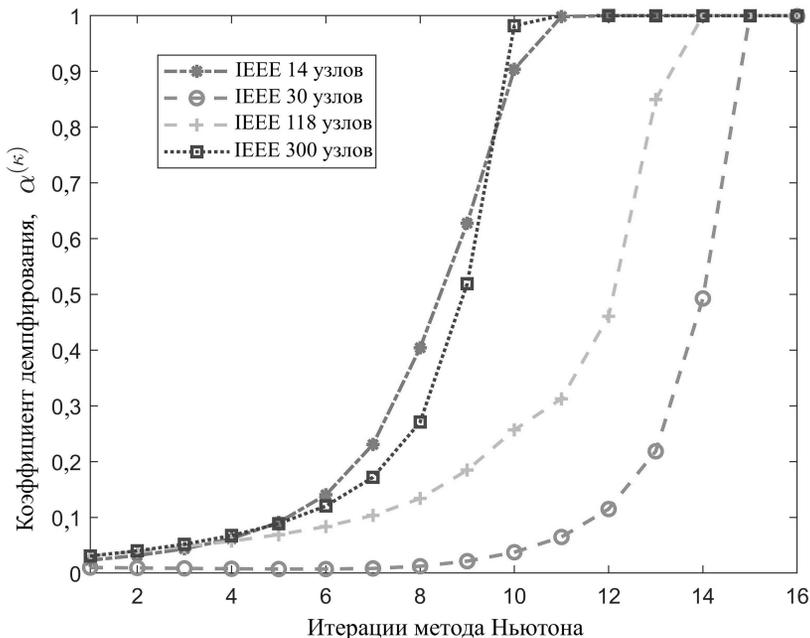


Рис. 3. Выбор оптимального размера шага  $\alpha^{(\kappa)}$  для каждой итерации метода TENR на примере тестовых IEEE схем.

предложенная стратегия выбора шага приводит к небольшим значениям  $\alpha$ . Однако по мере приближения алгоритма к решению, размер шага постепенно увеличивается. Это поведение можно объяснить тем, что на начальных итерациях аппроксимация уравнений в (12) первого порядка методом Тейлора слабо удовлетворяет равенству. По мере продвижения алгоритма эта аппроксимация становится более точной, что приводит к увеличению размера шага  $\alpha$ .

#### 4. Генерирование параметров допустимых режимов

Для областей со сложной геометрией (невьпуклых, представленных нелинейными уравнениями), к которым безусловно относится область допустимых режимов энергосистем, рабочий способ получения асимптотически равномерных выборок основывается на использовании версии метода Монте-Карло, а именно, Монте-Карло на основе Марковских цепей (МСМС) [22]. Одним из наиболее известных и эффективных алгоритмов типа МСМС является Hit-and-Run (HR), впервые предложенный в [23], а позднее переоткрытый и подробно проанализированный в [24]. К сожалению, даже для простых плохо обусловленных областей (например, множество уровня плохо обусловленных функций), метод HR не работает или, по крайней мере, в вычислительном отношении неэффективен [25].

Разнообразие применений и недостатки существующих методов случайных блужданий открывают широкое поле для улучшения алгоритмов случайного блуждания. В частности, в работах Б.Т. Поляка были предприняты попытки использовать барьерные функции, распространенные в анализе методов внутренней точки для выпуклой оптимизации, и совместить их со случайными блужданиями на основе марковских цепей. В результате этих попыток был предложен барьерный метод Монте-Карло [26], чьи свойства перемешивания в некоторых случаях оказались предпочтительнее метода НР. Однако сложность каждой итерации в целом оставалась достаточно высокой (в частности, на каждой итерации требуется вычисление  $(\nabla^2 F(x))^{-1/2}$ , где  $F(x)$  – барьерная функция для области  $Q$ ). Более того, такой подход не может ускорить сходимость распределения получаемых точек к равномерному для областей, подобных симплексам. Наконец, в [27] излагается идея метода бильярдного блуждания – Billiard Walk, доказываются теоремы об асимптотической равномерности генерируемых точек для выпуклого и невыпуклого случая. В отличие от метода Ball Walk, где каждая последующая точка выбирается случайно равномерно в пересечении шара с центром в текущей точке и рассматриваемой области, и метода Hit-and-Run, где следующая точка выбирается случайно равномерно на случайной хорде, проведенной через текущую точку, в основу метода Billiard Walk положена бильярдная траектория случайной длины, выпущенная из текущей точки в случайном направлении.

Метод Hit-and-Run и его усовершенствованная модификация – метод Billiard Walk – предоставляют полезную возможность для генерации точек в области допустимых режимов. Единственное требование к области состоит в том, что для нее должна существовать процедура граничного оракула и, в случае бильярдного блуждания, способа восстановления нормали к границе.

Опишем работу метода Hit-and-Run и необходимую для его реализации процедуру граничного оракула для области допустимых режимов энергосистемы. Генерируемые точки расположены в многомерном пространстве полных узловых мощностей  $S_i = P_i + jQ_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , включающихся в себя активную мощность  $P_i$  и реактивную мощность  $Q_i$ .

1. Выбрать начальную точку  $S^0$ ,  $k = 0$ . Это может быть любой допустимый режим или так называемый плоский старт:  $V_i = 1$ ,  $P_i = 0$ ,  $Q_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
2. Сгенерировать случайный профиль утяжеления  $d^k$ , равномерно распределенный на единичной сфере в  $R^{2n}$ . Компоненты вектора  $d$  отражают приращения активной и реактивной мощности в правой части уравнений (1)–(2).
3. Вычислить предельные режимы в направлениях утяжеления  $d^k$  и  $-d^k$  и соответствующие им  $\bar{\lambda}$ ,  $\underline{\lambda}$  с помощью метода TENR.

4. Увеличить счетчик  $k = k + 1$  и выбрать следующую допустимую точку  $S^k = S^{k-1} + td$ , где скаляр  $t$  выбран случайно равномерно на отрезке  $[-\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ .
5. Сохранить  $S^k$  и значения, соответствующие предельным режимам, и перейти к шагу 2.

При реализации метода Billiard Walk в качестве нормали следует использовать собственный вектор матрицы Якоби, соответствующий нулевому собственному значению.

## 5. Численные примеры

Проиллюстрируем эффективность метода TENR и его модификаций для анализа предельных и генерирования допустимых режимов энергосистем. В качестве примера будут выбраны несколько модельных энергосистем из коллекции IEEE [28, 29], широко используемые в академических исследованиях. Метод TENR интегрирован в программный комплекс с открытым кодом – PESOL [30].

### 5.1. Вычисление предельных режимов

Сравнение точности оценки граничных режимов проводилось между TENR и тремя наиболее распространенными методами оценки предельных состояний, интегрированными в различные программные комплексы: Continuation Power Flow (CPF), Power System Analysis Toolbox (PSAT) и MATPOWER. Результаты сравнения значений  $\lambda$ , характеризующих запасы статической устойчивости, представлены в табл. 1.

Результаты сравнения метода TENR с прямыми конкурентами показывают, что запас устойчивости, рассчитанный с помощью TENR, во всех рассмотренных случаях не ниже, чем значения, полученные с помощью других методов. Также для некоторых случаев TENR указал действительный запас устойчивости чуть больше, чем другие методы. Главное преимущество TENR – скорость расчета и возможность масштабирования (расчет энергосистем размерностью в тысячи узлов). Подробное сравнение скорости расчета с помощью TENR с прямыми конкурентами представлено в [14].

**Таблица 1.** Сравнение запаса устойчивости, полученного с помощью метода TENR с аналогами (без учета ограничений по напряжению)

IEEE-схема	$\lambda_{TENR}$	$\lambda_{CPF}$	$\lambda_{PSAT}$	$\lambda_{MAT}$
9 узлов	1,486	1,486	1,481	1,483
14 узлов	3,061	3,061	3,059	3,056
30 узлов	1,958	1,957	1,959	1,838
57 узлов	0,893	0,892	0,891	0,890
118 узлов	2,188	2,187	2,187	2,184
300 узлов	0,430	0,430	0,429	0,425

## 5.2. Генерирование параметров допустимых режимов

В настоящей работе в качестве примера рассмотрена пятиузловая схема, которая представлена на рис. 4. Указанная система – модифицированный пример, впервые представленный в [31]: узел 1 – базисный узел с напряжением  $\hat{V}_1 = 1,0$ . Здесь используется принятое в электроэнергетике описание комплексного напряжения в полярной форме  $|V|e^{j\delta}$ , где фазовый угол записывается следом за модулем в форме  $V\angle\delta$ . Остальные узлы в системе – PV-узлы с фиксированным значением напряжения 1.0 (р.у.), за исключением узла 3, который является PQ-узлом с комплексным значением напряжения  $\hat{V}_3 = |V_3|e^{j\delta_3}$ . Также предполагается, что в узлах 4 и 5 установлены синхронные компенсаторы с нулевой активной мощностью. Следовательно, пространство решений ограничено параметрами  $P_2, P_3, Q_3$ .

Рассмотрим сечение допустимой области плоскостью параметров  $P_2 - P_3$ , остальные параметры правой части УУР оставим фиксированными, как указано выше,  $Q_3 = 2$ . Результаты генерации 80 и 200 допустимых режимов представлены на рис. 5 и 6. Точки соответствуют внутренним точкам области допустимых режимов, а крестики – граничным режимам. Из рисунков видно, что 200 сгенерированных допустимых режимов уже достаточно для решения практических задач оптимизации режима, а предельные режимы довольно плотно покрывают границу допустимой области.

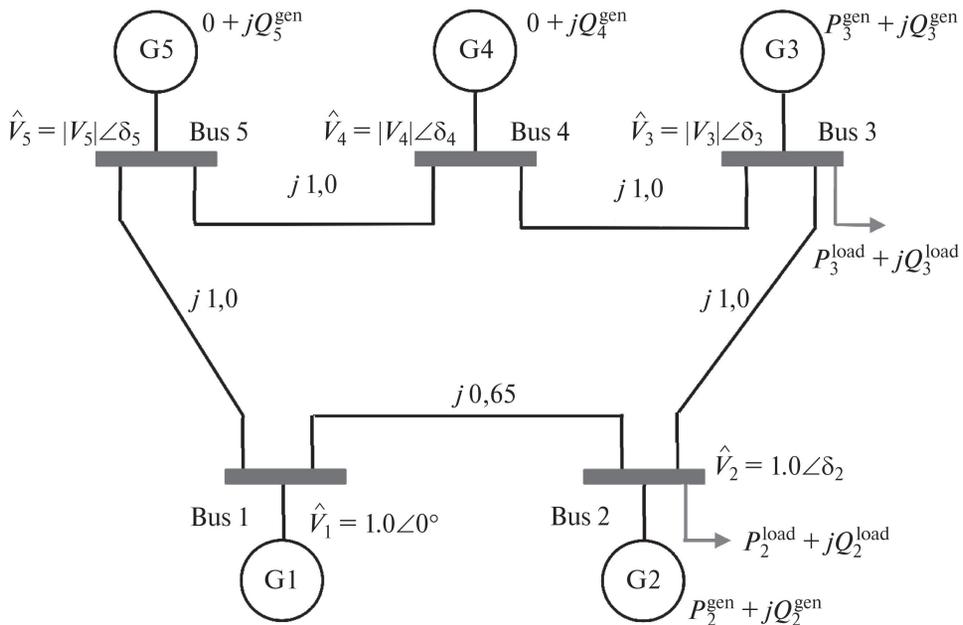


Рис. 4. Пятиузловая схема энергосистемы.

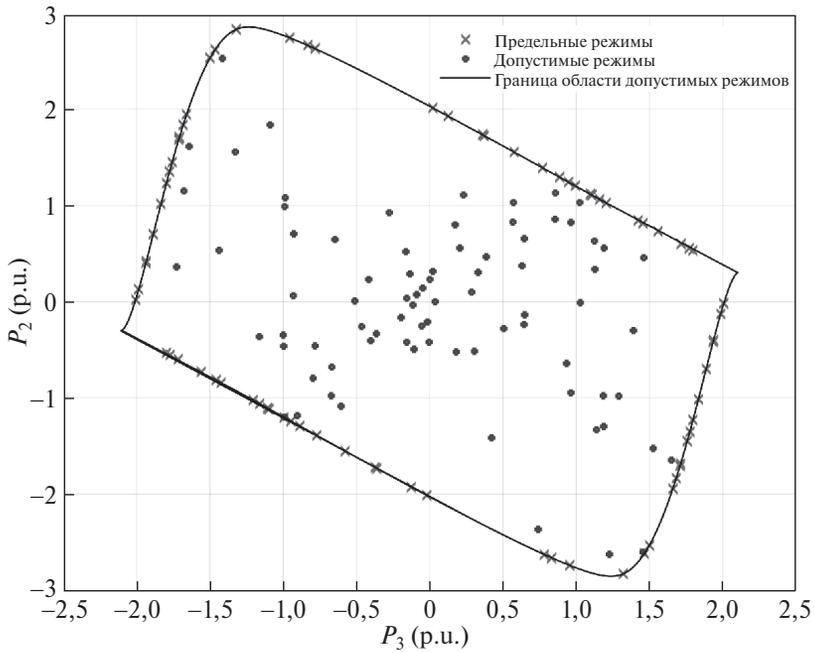


Рис. 5. Сечение области существования режима плоскостью параметров  $P_2-P_3$  с фиксированным значением  $Q_3 = 2$  p.u. (80 допустимых точек).

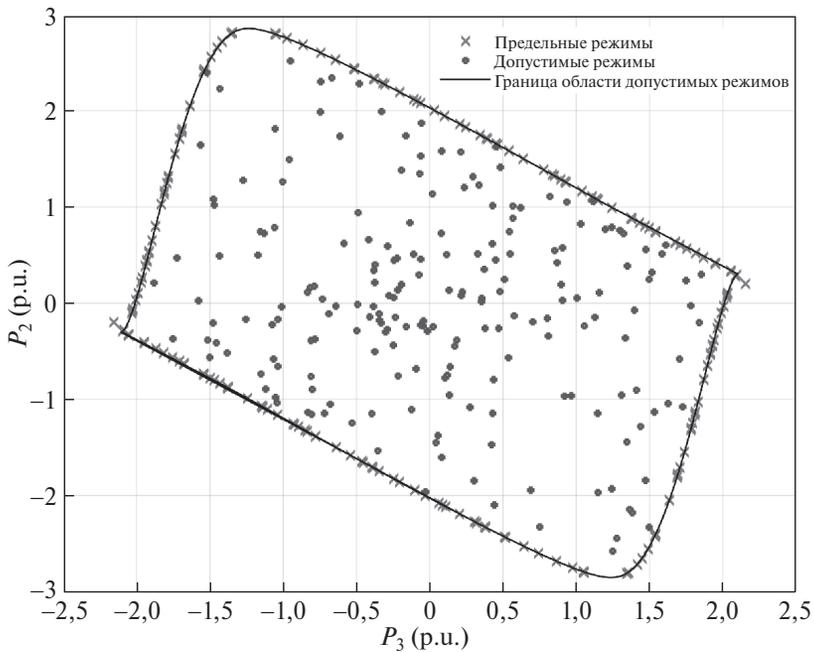


Рис. 6. Сечение области существования режима плоскостью параметров  $P_2-P_3$  с фиксированным значением  $Q_3 = 2$  p.u. (200 допустимых точек).

## 6. Заключение

В данной статье описаны основные трудности, возникающие при вычислении параметров критических режимов энергосистем, а также представлен метод TENR, который на данный момент выглядит как наиболее эффективный метод для расчета предельных режимов. Более того, впервые представлено и протестировано использование метода TENR для построения процедуры граничного оракула и генерации с его помощью точек в области допустимых режимов.

Удивительным образом задачи анализа допустимых и предельных режимов энергосистем черпают свои решения в работах Б.Т. Поляка. Для энергетики оказались чрезвычайно полезны результаты по выпуклости образа квадратичного отображения, модификаций метода Ньютона и подробное описание схем случайных блужданий для генерации точек в областях со сложной геометрией. Авторы не сомневаются, что новые подобные связки и мосты исследователям еще предстоит обнаружить в будущем.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Polyak B.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // *J. Optim. Theor. Appl.* 1998. V. 99. P. 553–583.
2. *Polyak B.* Convexity of nonlinear image of a small ball with applications to optimization // *Set-Valued Analysis*. 2021. V. 9. P. 159–168.
3. *Polyak B., Gryazina E.* Convexity/nonconvexity certificates for power flow analysis // *Advances in Energy System Optimization: Proceedings of the first International Symposium on Energy System Optimization*. 2017. P. 221–230.
4. *Ayuev B., Davydov V., Erokhin P.* Fast and reliable method of searching power system marginal states // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2016. V. 31. No. 6. P. 4525–4533.
5. *Ali M., Gryazina E., Dymarsky A., Vorobev P.* Calculating voltage feasibility boundaries for power system security assessment // *Int. J. Elect. Power & Energy Syst.* 2023. V. 146. P. 108739.
6. *Ali M., Ali M.H., Gryazina E., Terzija V.* Calculating multiple loadability points in the power flow solution space // *Int. J. Elect. Power & Energy Syst.* 2023. V. 148. P. 108915.
7. *Gryazina E., Polyak B.* On the root invariant regions structure for linear systems // *IFAC Proceedings Volumes*. 2005. V. 38. No. 1. P. 90–95.
8. *Gryazina E., Polyak B.* Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited // *Automatica*. 2006. V. 42. No. 1. P. 13–26.
9. *Polyak B., Tremba A.* Sparse solutions of optimal control via Newton method for under-determined systems // *J. Global Optim.* 2020. V. 76. No. 3. P. 613–623.
10. *Polyak B., Tremba A.* New versions of Newton method: step-size choice, convergence domain and under-determined equations // *Optim. Method. and Soft.* 2020. V. 35. No. 6. P. 1272–1303.

11. *Ali M., Dymarsky A., Turitsyn K.* Transversality enforced Newton–Raphson algorithm for fast calculation of maximum loadability // IET Generat. Transmis. Distribut. 2018. V. 12. No. 8. P. 1729–1737.
12. *Ali M., Gryazina E., Turitsyn K.* Fast calculation of the transfer capability margins // IEEE Milan PowerTech. 2019. P. 1–6.
13. *Ali M., Gryazina E., Khamisov O., Sayfutdinov T.* Online assessment of voltage stability using Newton-Corrector algorithm // IET Generat. Transmis. Distribut. V. 14. No. 19. P. 4207–4216.
14. *Baluev D., Ali M., Gryazina E.* State of the art approach for comprehensive power system security assessment-Real case study // Int. J. Elect. Power & Energy Syst. 2024. V. 155. P. 109594.
15. *Sauer P.W., Pai M.A.*, Power system steady-state stability and the load-flow Jacobian // IEEE Transact. Power Syst. 1990. V. 5. No. 4. P. 1374–1383.
16. *Tremba A., Calafiore G., Dabbene F., Gryazina E., Polyak B., Shcherbakov P., Tempo R.*, RACT: Randomized algorithms control toolbox for MATLAB // IFAC Proceedings Volumes. 2008. V. 41. No. 2. P. 390–395.
17. *Polyak B., Gryazina E.* Randomized methods based on new Monte Carlo schemes for control and optimization // Ann. Oper. Res. 2011. V. 189. P. 343–356.
18. *Веников В.А.* Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Высш. шк., 1985.
19. *Аюев Б.И., Давыдов В.В., Ерохин П.М., Нейумин В.Г.*, Вычислительные модели потокораспределения в электрических системах: монография. М.: Флинта, 2008.
20. *Жданов П.С.* Вопросы устойчивости электрических систем. М.: Энергия, 1979.
21. *Идельчик В.И.* Электрические системы и сети. М.: Энергоатомиздат, 1989.
22. *Diaconis P.* The markov chain monte carlo revolution // Bull. Amer. Math. Soc. 2009. V. 46. No. 2. P. 179–205.
23. *Turchin V.F.* On the computation of multidimensional integrals by the monte-carlo method // Theor. Probab. Appl. 1971. V. 16. No. 4. P. 720–724.
24. *Smith R.* Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions // Oper. Res. 1984. V. 32. No. 6. P. 1296–1308.
25. *Polyak B., Shcherbakov P.*, Why does Monte Carlo fail to work properly in high-dimensional optimization problems? // Theor. Probab. Appl. 2017. V. 173. P. 612–627.
26. *Polyak B., Gryazina E.* Markov Chain Monte Carlo method exploiting barrier functions with applications to control and optimization // 2010 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design. 2010. P. 1553–1557.
27. *Gryazina E., Polyak B.* Random sampling: Billiard walk algorithm // Eur. J. Oper. Res. 2014. V. 238. No. 2. P. 497–504.
28. *Vittal V., Martin D., Chu R., Fish J., Giri J.C., Tang C.K., Villaseca F.E., Farmer R.G.* Transient stability test systems for direct stability methods // IEEE Transact. Power Syst. 1992. V. 7. No. 1. P. 37.

29. *Working Group*. Common format for exchange of solved load flow data. // IEEE Transact. Power Appar. Syst. 1973. No. 6. P. 1916–1925.
30. *Ali M., Baluev D., Ali M.H., Gryazina E.* A Novel Open Source Power Systems Computational Toolbox // North American Power Symposium (NAPS). 2021. P. 1–6.
31. *Lesieutre B.C., Hiskens I.A.*, Convexity of the set of feasible injections and revenue adequacy in FTR markets // IEEE Transact. Power Syst. 2005. V. 20. No. 4. P. 1790–1798.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024